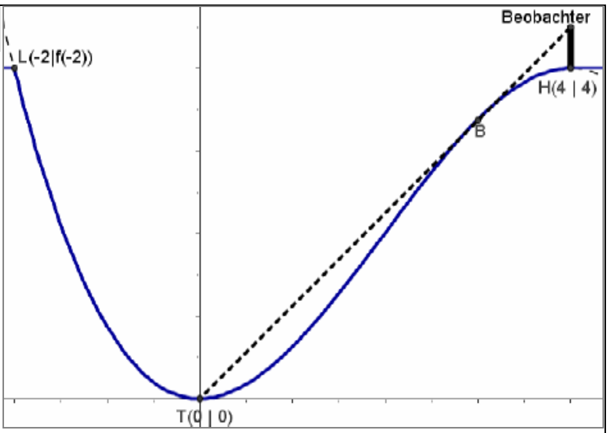
Anwendungsorientierte Steckbriefaufgabe

Der Blick ins Flussbett



Das Profil eines Flussbetts werde im Bereich $-2 \le x \le 4$ durch eine ganzrationale Funktion f 3. Grades beschrieben.

Im Punkte H(4 | 4) ist ein Hochpunkt, der Tiefpunkt des Flussbetts liegt bei T(0 | 0). (Alle Angaben in m)

Hinweis zur geometrischen Vorstellung (ohne Einfluss auf die Rechnungen): Auf der linken Seite hat das Flussbettprofil eine Kante im Punkt L(–2 | f(–2)). Rechts nach dem Hochpunkt H verläuft das Landschaftsprofil horizontal, links von der Kante bei L ebenfalls.

a) Ermittle den Funktionsterm des Flussbettprofils

b) Das Wasser steht gerade bis zum steilsten Stelle des rechten Flussbettprofils. Ermittle den Wasserstand.

c) Skizziere das Flussbett! Berücksichtige hierbei alle wichtigen Stellen (z.B. auch Wendepunkte)

d) Wie groß muss ein Beobachter sein, der an der rechten Flussseite im Punkte H steht, damit er den Tiefpunkt des Flussbetts (bei ausgetrocknetem Flussbett) gerade noch sehen kann?

Ermittle hierzu die Funktionsgleichung für die entsprechende Sichtlinie zwischen Beobachter und Tiefpunkt und gib auch den Berührpunkt der Sichtlinie mit dem Flussbettprofil an.

---

a) **Ansatz**:

$f(x) = a\cdot x^3 + b\cdot x^2 + c\cdot x + d$

$f'(x) = 3\cdot a\cdot x^2 + 2\cdot b\cdot x + c$

(1)	$f(0) = 0$	geht durch T(0|0)
(2)	$f(4) = 4$	geht durch H(4|4)
(3)	$f'(4) = 0$	H(4|4) ist HP
(4)	$f'(0) = 0$	T(0|0) ist TP

solve({f(0)=0,f(4)=4,f1(4)=0,f1(0)=0},{a,b,c,d}) $\rightarrow$ {a=$-\frac{1}{8}$,b=$\frac{3}{4}$,c=0,d=0}

(oder mit der 2D-Tastatur [{▤])

Ergebnis: Das Flussbett wird im Bereich $-2 \le x \le 4$ durch den folgenden Funktionsterm beschrieben: $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2$

```
Define f(x)=a·x^3+b·x^2+c·x+d
                                done
Define f1(x)=diff(f(x),x,1)
                                done
solve({f(0)=0,f(4)=4,f1(4)=0,f1▸
              {a=-1/8,b=3/4,c=0,d=0}
{f(0)=0
 f(4)=4
 f1(4)=0
 f1(0)=0 |a,b,c,d
              {a=-1/8,b=3/4,c=0,d=0}
```

---

b) Die steilste Stelle ist der Wendepunkt bzw. das lok. Maximum von f': f''(x)=0:

$f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2$ $\quad$ $f''x) = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$ $\quad$ f''(x)=0 mit solve: $x_1=2$

$f'x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}x$ $\quad$ $f'''x) = -\frac{3}{4}$ $\quad$ Überprüfung mit 3. Ableitung

$f'''(2) = -\frac{3}{4} \neq 0$ also Wendestelle

Der Funktionswert an der Wendestelle: f(2)=2

Ergebnis: Der Wasserstand ist 2m hoch.

d) Gesucht ist die Tangente vom Punkt T(0|0) an f.

Der Berührpunkt B(u | f(u)) ist zunächst unbekannt.

Durch die Tangentengleichung $y = f'(u)\cdot(x-u) + f(u)$ erhält man eine Gleichung für u, indem man den Punkt T(0 | 0) einsetzt.

$0 = f'(u)(0-u) + f(u)$ auflösen nach u mittels solve:

solve(f1(u)·(0–u) + f(u)=0,u) $\rightarrow$ {u=0,u=3}, die 2. Lösung ist sinnvoll.

Die Tangente ergibt sich (u einsetzen) wegen $f'(3)=\frac{9}{8}$ und $f(3)=\frac{27}{8}$ zu:

$y = f'(3)\cdot(x-3) + f(3) = \frac{9}{8}\cdot(x-3)\cdot + \frac{27}{8} = \frac{9}{8}\cdot x$, Berührpunkt: $B(u \mid f(u)) = B(3|\frac{27}{8})$

Höhe des Beobachters (über x-Achse) durch einsetzen von x=4 in die Tangentengleichung: $\frac{9}{8}\cdot 4 = 4{,}5$. Relativ zum Boden: $4{,}5 - f(4) = 0{,}5$

Ergebnis: Der Beobachter muss eine Mindesthöhe von 0,5m haben.

```
define f(x)=-1/8·x^3+3/4·x^2
                                done
define f1(x)=diff(f(x),x,1)
                                done
expand(f1(x))
                        -3·x^2/8+3·x/2
define f2(x)=diff(f(x),x,2)
                                done
expand(f2(x))
                           -3·x/4+3/2
define f3(x)=diff(f(x),x,3)
                                done
expand(f3(x))
                                -3/4
solve(f2(x)=0,x)
                               {x=2}
f3(2)
                                -3/4
f(2)
                                   2
solve(f1(u)×(-u)+f(u)=0,u)
                           {u=0,u=3}
f1(3)
                                 9/8
f(3)
                                27/8
```